汕头大学2020年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：612
科目名称：数学分析
适用专业：数学

考 生 须 知
答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

1. （每小题5分）判断下列极限是否存在，如果存在，求其值。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt}{x^2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

2. （每小题8分）计算下列积分

（1）$\iiint_V e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz$，其中$V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$。

（2）$\int_C xy^2dy-yx^2dx$，其中C为单位圆周取逆时针定向。

3. （10分） 求由曲线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$所围成的有界闭域的面积。

4. 在第一象限中，求单位球面：$x^2+y^2+z^2=1$的切平面分别使得：

（1）与坐标轴围成的四面体体积最小；（8分）

（2）与坐标轴的截距平方之和最小。（8分）

5. （15分）设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上二阶可导，且满足$f(a)=f(b)=0$及

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0。$$

证明：存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)<0$。

6. （15分）证明积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$条件收敛。

7. （15分）将函数$f(x)=x\ (x\in[-\pi,\pi))$展开成傅里叶（Fourier）级数并证明

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}。$$

8. 设$f(x)$是闭区间$[0,1]$上的连续可微函数。

（1）（10 分）利用$F(x,y)=\left(f(x)-f(y)\right)^2$在$[0,1]\times[0,1]$上的重积分证明：

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\le\int_0^1 f^2(x)dx。$$

（2）（5 分）设$g(x)$是$[0,1]$上的线性函数使得$g(0)=f(0)$且$g(1)=f(1)$。证明：

$$\int_0^1\left(g'(x)\right)^2dx\le\left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2。$$

9. （9 分）设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的连续可微函数，且对任意$\lambda>0,(x,y)\in\mathbb{R}^2$，均有

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)。$$

证明：$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$。

10. （9 分）设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的二阶连续可微函数，且$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点。

证明：矩阵$\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\end{bmatrix}$是半正定的。

11. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是严格单调递增的连续函数，且满足

$$f(x+1)=f(x)+1。$$

令$g(x)=f(x)-x$。证明：

（1）（2 分）1 是函数$g(x)$的一个周期。

（2）（2 分）$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)=\max\limits_{x\in[0,1]}g(x)$和$\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)=\min\limits_{x\in[0,1]}g(x)$。

（3）（6 分）$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)-\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)\le 1$。