

汕头大学 2022 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 612

科目名称: 数学分析

适用专业: 数学

考生须知

答案一律写在答题纸上, 答在
试题纸上的不得分! 请用黑色字迹
签字笔作答, 答题要写清题号, 不
必抄原题。

一. (共 20 分) 判断下列极限是否存在。如果存在, 求其值; 如果不存在, 请解释原因 (每题 5 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1 - \frac{1}{x} \ln(1+x)} - 1}{x}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{\sin^2(x+y)}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$$

$$(4) \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x t dt}{\int_0^t x t dx}$$

二. (共 20 分) 判断下列级数的敛散性 (绝对收敛、条件收敛或发散) 并说明理由

(1) (5 分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 - n})$$

(2) (15 分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(n\pi + \frac{1}{n}) - \sin(n\pi)]$$

三. (10 分) 设 y 是 x 的函数, 满足 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arcsin \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$

四. (10 分) 计算不定积分 $\int \frac{x^3 + 1}{1 + x^2} dx$

五. (10 分) 设 $x > 0, y > 0$ 证明不等式: $\frac{x^{2022} + y^{2022}}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^{2022}$

六. (15 分) 求函数 $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 的傅里叶展开式

七. (10 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数, 且满足: 对任意 x , 积分

汕头大学 2022 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

$\int_0^x f(t)dt$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 1$$

八. (15 分) 计算积分 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{|z|}}$, 其中 Ω 是球体 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 \leq R^2$

九. (共 25 分) 令 L 是平面 $x + y + z = a$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的交线。 L 将球面分成两部分, 上面部分记为 Σ

(1) (10 分) 求 Σ 的面积

(2) (15 分) 给予 L 如下定向: 从正 Z 轴的方向看逆时针为正向。求积分:

$$\int_L (\cos x^3 + x^3 + y) dx + (\sin y^2 + y^2 + z) dy + (\ln z^4 + z^4 + x) dz$$

十. (15 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)}$ 的和