汕头大学 2022 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814

科目名称：高等代数

适用专业：数学

一.（20 分） 设 $D_n=\begin{pmatrix} 5 & 2 & & & & \\ 2 & 5 & 2 & & & \\ & 2 & 5 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 5 & 2 \\ & & & & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 为 n 阶三对角矩阵，空格处为零.

(1) 求 D_n 的行列式。

(2) 证明：二次型 $q(x)=x^T D_n x$ 是正定二次型，这里 x^T 表示 x 的转置.

(3) 设 λ 是 D_n 的一个特征值. 证明：齐次线性方程组 $(D_n-\lambda I_n)x=0$ 的解空间的维数为 1，其中 I_n 是 n 阶单位矩阵.

二.（15 分）(1)假设 A,B 为 n 阶方阵，满足 $3A+B=AB$，证明 $A-I_n$ 可逆，其中 I_n 为 n 阶单位阵.

(2)设 n 阶矩阵 A 满足 $A^{k-1}\neq 0, A^k=0, k\geq 2$，证明 I_n-A 可逆，并求出其逆阵.

三.（20 分）设矩阵 A 为一个 n 阶正交矩阵.

(1) 求 A 的行列式和逆阵.

(2) 证明 A 的特征值 λ 满足 $|\lambda|=1$.

(3) 若 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,\cdots,y_n)^T\in R^n$， $y=Ax$，证明: $x_1^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+\cdots+y_n^2$.

(4) 写出 2 个 2 阶非单位矩阵的正交阵的例子，其中之一对应镜像变换，另一个对应旋转变换.

四.(20 分)设 $H_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$，其中 H_n 的第 k 行的前面 k 个元素分别为 $1,\cdots,k$，后面 $n-k$ 个元素均为 k.

(1) 证明 H_n 是正定矩阵.

(2) 求 H_n 的逆阵 H_n^{-1}.

(3) 求出 H_n 的所有特征值的积、和.

(4) 求出 H_n^{-1} 的所有特征值的积、和.

(5) 证明 H_n^{-1} 也是一个正定矩阵.

汕头大学 2022 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

五.(20 分)(1) 设 B, C 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，其中 m、n 为正整数。证明：如果 I_m+CB 可逆，则 I_n+BC 可逆且 $(I_n+BC)^{-1}=I_n-B(I_m+CB)^{-1}C$.

(2) 设 $a_i=i, i=1,2,\dots,n$,

$$M_n=\begin{pmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & a_{n-1}^2+(n-1) & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & a_n^2+n \end{pmatrix}.$$

证明 M_n 可逆并求其逆矩阵.

六.(20 分) 解答下列问题:

(1) 求用 $(x+1)^2$ 除 $x^{2022}+2022x$ 的余式.

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 都是实系数多项式，且 $[f(x)]^2=x[g(x)]^2+x[h(x)]^2$. 证明:

$$f(x)=g(x)=h(x)=0.$$

(3) 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 a,b,c 为整数，且 $(a+b)c$ 为奇数. 证明：$f(x)$ 在有理数域上不可约.

七.(20 分) 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，b 是 m 维列向量（元素均为实数），m, n 为正整数.

(1) 设 x^* 满足 $(A^TA)x^*=A^Tb$，证明：x^* 是函数 $f(x)=(b-Ax)^T(b-Ax)$ 的最小值点.

(2) 证明：线性方程组 $(A^TA)x=A^Tb$ 有解，其中 A^T 表示 A 的转置矩阵.

八.(15 分) 证明实二元数组的集合按下面定义的加法和数乘构成线性空间:

加法：$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$;

数乘：$k\circ(a,b)=\left(ka,kb+\dfrac{k(k-1)}{2}a^2\right)$.